

19.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x \, dx, \cos x = t. \text{ Vast. } \frac{1}{3}.$

20.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}, \tan \frac{x}{2} = t. \text{ Vast. } \frac{\pi}{\sqrt{5}}.$

21.  $\int_1^4 \frac{x \, dx}{\sqrt{2+4x}}, 2+4x = t^2. \text{ Vast. } \frac{3\sqrt{2}}{2}.$

22.  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}, x = \tan t. \text{ Vast. } \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$

23.  $\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x} \, dx, x-1 = t^2. \text{ Vast. } 2(2 - \arctan 2).$

24.  $\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dz}{z\sqrt{z^2+1}}, z = \frac{1}{x}. \text{ Vast. } \ln \frac{3}{2}.$

25.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi \, d\varphi}{6-5\sin \varphi + \sin^2 \varphi}, \sin \varphi = t. \text{ Vast. } \ln \frac{4}{3}.$

1320.  $\int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \, dx, x = a \cos t. \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) a$

1321.  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx, \arcsin x = t. \frac{6-\pi\sqrt{3}}{12}$

1322.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} \, dx, \tan^2 x = t. \frac{\pi}{4}$

1323.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{3+2\sin 2x} \, dx, \sin x - \cos x = t. \frac{\ln 3}{4}$

1324.  $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} \, dx, e^x - 1 = t^2. \frac{4-\pi}{2}$

**Ruumala arvutamine**

19. Ellips  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  pöörleb ümber  $x$ -telje. Arvutada tekkiva pöördkeha ruumala. Vast.  $\frac{4}{3} \pi ab^2$ .

20. Koordinaatide alguspunkti ja punkti  $(a; b)$  ühendav sirglõik pöörleb ümber  $y$ -telje. Leida tekkiva koonuse ruumala. Vast.  $\frac{1}{3} \pi a^2 b$ .

21. Leida ringi  $x^2 + (y-b)^2 = a^2$  pöörlemisel ümber  $x$ -telje moodustuva rõnga ruumala (eeldusel, et  $b \geq a$ ). Vast.  $2\pi^2 a^2 b$ .

22. Leida joontega  $y^2 = 2px$  ja  $x = a$  piiratud kujundi pöörlemisel ümber  $x$ -telje tekkiva pöördkeha ruumala. Vast.  $\pi pa^2$ .

23. Leida hüpotüklidiga  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$  piiratud kujundi pöörlemisel ümber  $x$ -telje tekkiva pöördkeha ruumala. Vast.  $\frac{32\pi a^3}{105}$ .

24. Leida sinusoidi  $y = \sin x$  punktide  $(0; 0)$  ja  $(\pi; 0)$  vahelise kaare pöörlemisel ümber  $x$ -telje tekkiva pöördkeha ruumala. Vast.  $\frac{\pi^2}{2}$ .

25. Leida parabooliga  $y^2 = 4x$  ja sirgega  $x = 4$  piiratud kujundi pöörlemisel ümber  $x$ -telje tekkiva pöördkeha ruumala. Vast.  $32\pi$ .

26. Leida joontega  $y = xe^x, y = 0$  ja  $x = 1$  piiratud kujundi pöörlemisel ümber  $x$ -telje tekkiva pöördkeha ruumala. Vast.  $\frac{\pi}{4} (e^2 - 1)$ .

1489. Arvutada joontega  $y = x^2$  ja  $y^2 = x$  piiratud kujundi pöörlemisel ümber  $x$ -telje tekkiva pöördkeha ruumala.

1490. Leida sinusoidi  $y = \sin x$  ühe kaare pöörlemisel ümber  $x$ -telje tekkiva pöördkeha ruumala.

1491. Arvutada joontega  $y = \sin x, y = 1, x = 0$  piiratud kujundi pöörlemisel ümber  $y$ -telje moodustuva pöördkeha ruumala.

1492. Leida joontega  $y = 2x - x^2$  ja  $y = 0$  piiratud kujundi pöörlemisel ümber 1)  $x$ -telje, 2)  $y$ -telje tekkiva pöördkeha ruumala.

**Pöördpinna pindala arvutamine**

49. Leida koordinaatide alguspunkti ja punkti  $x = 3a$  vahelise parabooli  $y^2 = 4ax$  kaare pöörlemisel ümber  $x$ -telje moodustuva pöördpinna pindala. Vast.  $\frac{56}{3} \pi a^2$ .

50. Sirgjoone  $y = 2x$  punktide  $x = 0$  ja  $x = 2$  vaheline lõik pöörleb a) ümber  $x$ -telje; b) ümber  $y$ -telje. Leida moodustuva koonuse pindala. Vast. a)  $8\pi\sqrt{5}$ . b)  $4\pi\sqrt{5}$ .

51. Leida ringjoone  $x^2 + (y-b)^2 = a^2$  pöörlemisel ümber  $x$ -telje tekkiva rõnga pindala. Vast.  $4\pi^2 ab$ .

1473. Arvutada parabooli  $y^2 = 4x$  koordinaatide alguspunkti ja punkti  $(3; 2\sqrt{3})$  vahelise kaare pöörlemisel ümber  $x$ -telje moodustuva pöördpinna pindala.

**Kaare pikkuse arvutamine**

37. Leida hüpotüklidiga  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$  pikkus. Vast.  $6a$ .

38. Arvutada poolkuubilise parabooli  $ay^2 = x^3$  kaare pikkus koordinaatide alguspunktist punktini, mille abstsiss on  $x = 5a$ . Vast.  $\frac{335}{27} a$ .

39. Leida aheljoone  $y = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$  kaare pikkus punktist, kus  $x = 0$ , punktini  $(x; y)$ . Vast.  $\frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) = \sqrt{y^2 - a^2}$ .

40. Arvutada tsükloidi  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$  ühe kaare pikkus. Vast.  $8a$ .

41. Leida joone  $y = \ln x$  kaare pikkus vahemikus  $x = \sqrt{3}$  kuni  $x = \sqrt{8}$ . Vast.  $1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$ .

42. Leida joone  $y = 1 - \ln \cos x$  kaare pikkus vahemikus  $x = 0$  kuni  $x = \frac{\pi}{4}$ . Vast.  $\ln \tan \frac{3\pi}{8}$ .

Leida antud joone kaare pikkus punktist abstsissiga  $a$  punktini abstsissiga  $b$ :

1455.  $y = \sqrt[3]{x^2}, a = 0, b = 4.$

1456.  $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, a = 1, b = e.$

1457.  $y = \operatorname{ch} x, a = 0, b = \ln 2.$

1458.  $y = \ln \cos x, a = 0, b = \frac{\pi}{4}.$

1461. Arvutada joone  $y^2 = \frac{2}{3} (x-1)^3$  selle kaare pikkus, mis asetseb paraboolis  $y^2 = \frac{x}{3}$ .

1462. Leida parabooli  $y = x^2$  selle kaare pikkus, mis asetseb ringis  $x^2 + y^2 = 6$ .

1463. Arvutada joontega  $y = \ln(1-x^2)$  ja  $y = \ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$  piiratud ümbermõõt.

1464. Leida funktsiooni  $e^x$  graafiku kaare pikkus punktist  $(0; 1)$  punktini  $(1; e)$ .

1455.  $\frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1)$  1456.  $\frac{e^2+1}{4}$  1457.  $\frac{3}{4}$ .

1458.  $\ln \tan \frac{3\pi}{8} = \ln(1 + \sqrt{2})$  1461.  $\frac{8}{9} \left( \frac{5}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} - 1 \right)$

1462.  $3\sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln(3 + 2\sqrt{2})$  1463.  $\sqrt{5} - \frac{1}{2} (1 + \sqrt{13}) + \ln \frac{4 + 2\sqrt{13}}{1 + \sqrt{5}}$

1464.  $\sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} - 1 + \ln[(\sqrt{1+e^2}-1)(1+\sqrt{2})] \approx 2,0$  1473.  $\frac{56}{3} \pi$