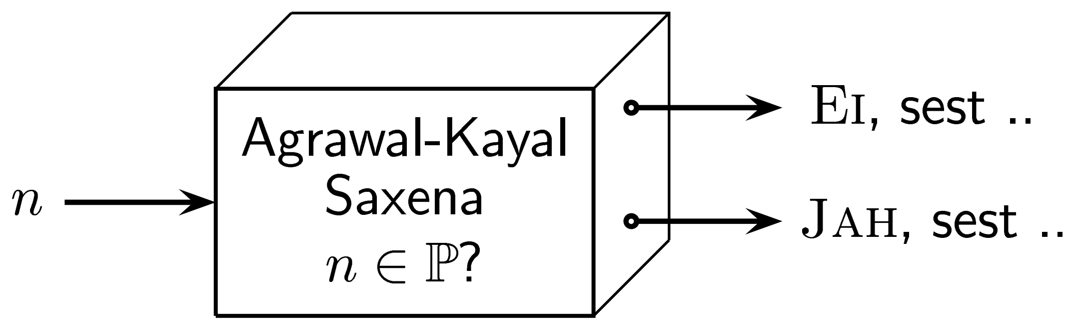
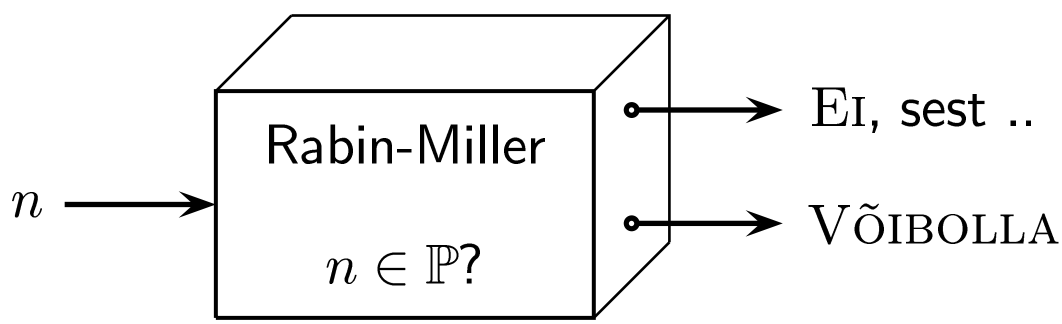
Algarvulisuse testid

Sven Laur
swen@math.ut.ee

Tartu Ülikool





Mõistete ja teadmiste kogumine

3. sajand e.m.a. Eukleides

– algarvulisuse mõiste
– suurima ühisteguri leidmise algoritm
– aritmeetika põhiteoreem

Teoreem (Fermat 1640).
Kui arv p on algarv, siis iga naturaalarvu a korral vahe $a^p - a$ jagub arvuga p.

□ Tõestati Euleri(1736) ja Leibnitzi(1683) poolt.

Teoreem (Gauss 1792).
Algarvude arv $\pi(x)$ intervallis $[0, x)$ on asümptootiliselt ekvivalentne suurusega $x/\ln x$,

□ Tõestus 1896.a. Hadamard ja de la Vallée-Poussin.

Teoreem (Bertrand 1845).
Iga naturaalarvu $n > 3$ korral leidub lõigus $[n, 2n-2]$ vähemalt üks algarv.

□ Tõestus 1851.a. Tšebõšev.

Tänapäevased algarvutestid

- 1976. Diffie ja Hellmani võtmevahetusprotokoll.
  1977. Rivest, Shamiri ja Adleman RSA.
  - Praktiline vajadus suurte algarvude leidmiseks.

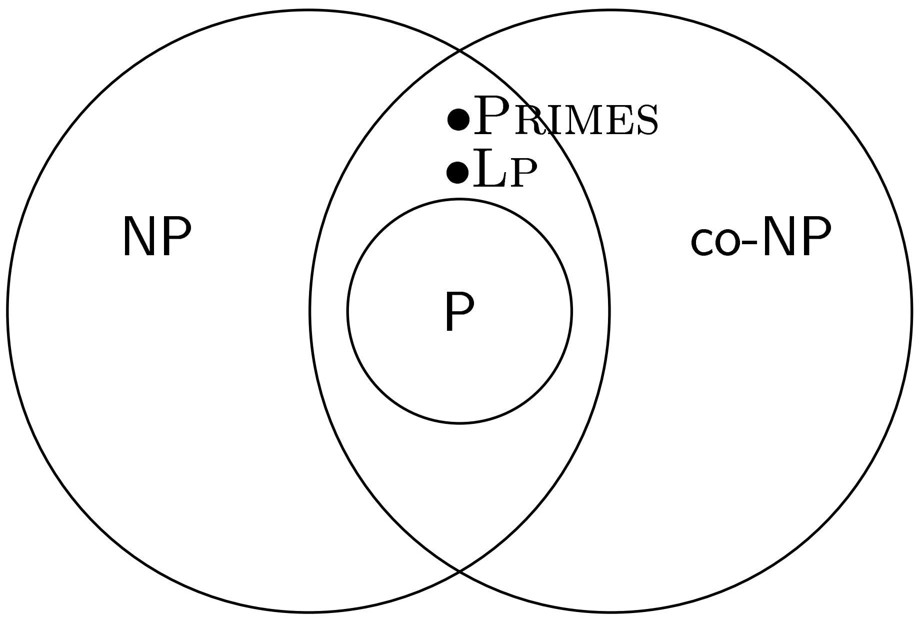
- 1977. Solovay ja Strassen tõenäosuslik algoritm
  - algarvu korral $\textsc{Prime}$
  - kordarvu korral tõenäosusega vähemalt $1/2$ $\textsc{Comp}$
  - ei genereeri algarvulisuse tõestust
  - keerukus $\widetilde{O}(\log^2 n)$

- 1975-1980 Rabin-Milleri tõenäosuslik algoritm
  - algarvu korral $\textsc{Prime}$
  - kordarvu korral tõenäosusega vähemalt $3/4$ $\textsc{Comp}$
  - ei genereeri algarvulisuse tõestust
  - keerukus $\widetilde{O}(\log^2 n)$

- 2002. Agrawal-Kayal-Saxena det. algoritm
  - algarvu korral $\textsc{Prime}$
  - kordarvu korral $\textsc{Composite}$
  - genereerib alg- ja kordarvulisuse tõestused
  - garanteeritud keerukus $\widetilde{O}(\log^{12} n)$
  - arvatav keerukus $\widetilde{O}(\log^6 n)$

Asetus keerukusklasside suhtes

- 70-nendate alguse levinud arusaam keerukusklasside vahekorrast.



- 1979. Khatšjan elliptiline lahendusmeetod Lp -ülesande lahendamiseks, st. Lp $\in$ P.

- 1976. Milleri polünomiaalne algoritm eeldusel kehtib ERH.

- 2002. Agrawal, Kayal ja Saxena näitasid, et Primes $\in$ P.

Sertifikaadi mõiste

Väite tõestamine jaguneb

– tõestuse idee osimine
– tõestuse genereerimine
– tõestuse kontrollimine kolmanda osapoole poolt

Kui algoritm annab välja vaid vastuseid JAH ja EI

– pole võimalik vastust kontrollida
– vigade korral tuleb otsast alustada

Definitsioon. *Sertifikaadiks nimetatakse algoritmi väljundit, mis võimaldab vastust kontrollida, ilma et peaks kordama arvutusi täies mahus.*

□ Sertifikaat põhineb harilikult mingil teoreemil.

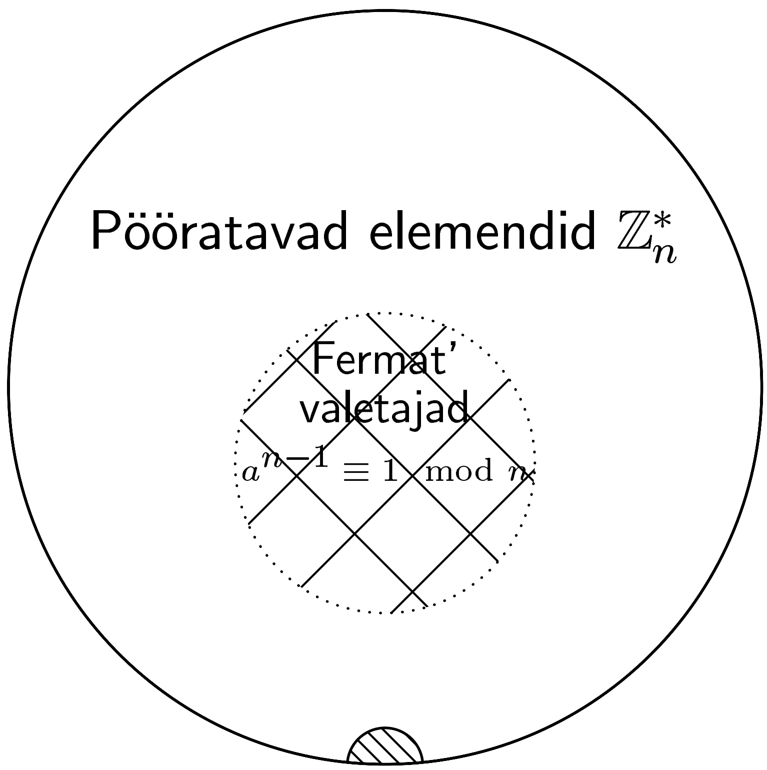
□ Sertifikaatide leidmise ja kontrollimise efektiivsus määrab ära algoritmi efektiivsuse.

□ Keerulist probleemi lahendusalgoritm

– potensiaalsete sertifikaatide genereerija
– sertifikaadi kontrollija

Fermat-Euleri test

Teoreem.
Naturaalarv n kordarv parajasti siis, kui leidub arv $a \in \mathbb{Z}_n^*$ nii, et $a^{n-1} \not\equiv 1 \mod n$.



Arvuga n ühistegurit omavad

- Carmichaeli arvud muudavad testi kasutuks.

Rabin-Milleri test

Teoreem.

Kui naturaalarvu n lahutusega $n-1 = 2^k r$ (r on paaritu) korral leidub $a \in \mathbb{Z}_n^*$, mis täidab tingimusi

$$\begin{aligned} &\gcd(a, n) = 1 \\ &a^r \not\equiv 1 \mod n \\ &a^{2^i r} \not\equiv -1 \mod n, \qquad i = 1, \ldots, k-1 \end{aligned}$$

siis n on kordarv.

- Arvutades a^{n-1} tekib järjestikune ruutude jada

$$a^r, a^{2r}, a^{4r}, \ldots, a^{2^{k-1}r}, a^{n-1} \equiv 1.$$

- Korpuses $\mathbb{Z}_p$ on igal arvul ülimalt kaks ruutjuurt.

- Kui jadas 1 eelnev arv pole ± 1, siis on n kordarv.

- Test väljastab iga kordarvu korral $\textsc{Prime}$ tõenäosusega tõenäosusega vähem kui $1/4$.

Lihtne algarvulisuse sertifikaat

Teoreem. *Olgu naturaalarvud a ja n ühistegurita, siis n on algarv parajasti siis, kui kehtib modulaarne võrdus*

$$(x-a)^n \equiv x^n - a^n \mod n.$$

TÕESTUS.
TARVILIKKUS. Kui n on algarv.

- Fermat' väikesest teoreemist $a^n \equiv a \mod n$.
- Iga $k \neq 0$ ja $k \neq n$ korral

$$n \Bigg| \binom{n}{k} = n\frac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}$$

PIISAVUS. Olgu teguri q aste arvus n on k.

- Kui $k = q$, siis

$$q^k \not\Bigg| \binom{n}{q} = \frac{n(n-1)\cdots(n-q+1)}{q(q-1)\cdots 1}$$

$\square$

Mõned järeldused

- Kongruentsvõrrandi kontrollimine võtab $\Omega(n)$ elementaaroperatsiooni.

- Selle põhjuseks on polünoomide astme tõkestamatu kasv.

- Võrrandis $(x-a)^n \equiv x^n - a^n \pmod{n,\ x^r - 1}$ kasvab aste kuni arvuni r.

- Eesmärgiks on leida sobiv $r = O(\mathrm{poly}(\log n))$, nii et kongruentsvõrrand kehtiks vaid algarvude korral.

- Ühest võrrandist ei piisa, kuid leidub sobilik võrrandite süsteem.

Agrawal-Kayal-Saxena algoritm

Sisend: naturaalarv $n > 1$.
Väljund: PRIME või COMPOSITE.

```
*** Eraldame naturaalarvude täisastmed ***
if (∃a, b ∈ ℕ : a^b = n) return COMPOSITE;
r = 2;
*** Otsime Agrawal-Kayal-Saxena setrifikaati ***
while (r < n)
{
  *** Kui gcd(n, r) ≠ 1, siis on n kordarv ***
  *** Selle sündmuse tõenäosus on kaduvväike ***
  if (gcd(n, r) ≠ 1) return COMPOSITE;
  *** Kontrollime, kas r on sobib sertifikaadiks ***
  if (r ∈ ℙ)
  {
    q = P(r − 1);
    if (q ≥ 4√r log n and n^((r−1)/q) ≢ 1 mod r) break;
  }
  r = r + 1;
}
*** Kontrollime saadud sertifikaati ***
for a = 1 to ⌊2√r log n⌋
{
  *** Kui n on algarv, siis a^n ≡ a mod n ***
  if ((x − a)^n ≢ x^n − a (mod n, x^r − 1))
    return COMPOSITE;
}
return PRIME;
```

Agrawal-Kayal-Saxena sertifikaat

Teoreem.
Olgu meid huvitav naturaalarv n, mis ei ole ühegi naturaalarvu m aste. Kui r on selline algarv, mis rahuldab kolme tingimust:

- *iga algarv $s \leq r$ on arvuga n ühistegurita,*
- *leidub $r-1$ algarvuline tegur $q \geq 4\sqrt{r}\log n$,*
- *$q \mid \operatorname{ord}_r(n)$,*

siis n on algarv parajasti siis, kui on täidetud kongruentside süsteem

$$\begin{cases} (x-a)^n \equiv x^n - a^n \pmod{n, x^r - 1}, \\ \qquad a = 1, 2, \ldots, \lfloor 2\sqrt{r}\log n \rfloor. \end{cases}$$

TÕESTUS
TARVILIKKUS. Iga algarv rahuldab AKS-testi.

PIISAVUS. Selleks näitame, et kordarv, mis rahuldab AKS-testi on algarvu aste. Seda tehakse läbi kongruentside.

$\boxed{?}$

Genereeritud alamrühm

- Leidub n selline algarvuline tegur p nii, et $q \mid d = \mathrm{ord}_r(p) \quad \Rightarrow \quad q \leq d$.

- Polünoomi $x^r - 1$ iga taandumatu teguri $h(x)$ üle $\mathbb{F}_p$ aste on d.

- Tekib lõplik korpus $\mathbb{F}_p[x]/(h(x))$ elementide arvuga p^d.

- Vaatleme elementide $x - a$ poolt genereeritud multiplikatiivset rühma

$$G = \left\{ \prod_{i=1}^{l} (x - i)^{\beta_i} \mid 0 \leq \beta_i, i = 1, 2 \ldots, l \right\}$$

- AKS-testis olevad lineaarpolünoomid $x - a$ ei saa mooduli p järgi kokku langeda

$$\begin{aligned} & a_i \equiv a_j \mod p \\ \Rightarrow \quad & p \mid \gcd(a_i - a_j, n) \text{ ja } |a_i - a_j| < r \end{aligned}$$

- Vastuolu r esimese tingimusega.

Alamrühma generaatorpolünoom

- Alamrühma G genererib $\lfloor 2\sqrt{r}\log n\rfloor < q < r < p$ erinevat polünoomi.

Lemma. *Olgu r ja p algarvud ning $d = \operatorname{ord}_r(p)$. Kui $h(x)$ on polünoomi $x^r - 1$ taandumatu tegur üle $\mathbb{F}_p$, siis $l < p$ erineva lineaarpolünoomi $x - a_i$ üle $\mathbb{F}_p$ poolt genereeritud rühm*

$$G = \left\{ \prod_{i=1}^{l} (x - a_i)^{\beta_i} \mid 0 \le \beta_i, i = 1, 2 \dots, l \right\}$$

on korpuses $\mathbb{F}_p[x]/\big(h(x)\big)$ tsükliline ja selle elementide arv $\#G > \left(\frac{d}{l}\right)^l$.

- Seega leidub G generaatorpolünoom $g(x)$ ning selle järk on

$$d_g \ge \left(\frac{q}{l}\right)^l = \left(\frac{4\sqrt{r}\log n}{\lfloor 2\sqrt{r}\log n\rfloor}\right)^{\lfloor 2\sqrt{r}\log n\rfloor} \ge n^{2\sqrt{r}}.$$

- Kuna $d_g \ge n^{2\sqrt{r}}$, siis hakkame otsima sobivat kongruentsi mooduli d_g järgi.

Polünoomi võrdsustate hulk

Definitsioon 1. *Polünoomi $g(x) \in \mathbb{F}_p$ võrdsustajatehulgaks mooduli p ja polünoomi $x^r - 1$ suhtes nimetatakse hulka*

$$I_{g(x)} = \left\{ m \in \mathbb{N}_0 \mid g(x)^m \equiv g(x^m) \left(\operatorname{mod} p, x^r - 1 \right) \right\}.$$

Lemma. *Polünoomi $g(x)$ võrdsustajate hulk $I_{g(x)}$ on kinnine korrutamise suhtes.*

Lemma. *Iga täisarvulise kordajatega polünoomi f korral kehtib kongruents $f(x)^p \equiv f(x^p) \mod p$.*

- Generaatorpolünoomi $g(x)$ võrdsustajatehulka kuulub n, sest see on korrutis $x - a_i$ astmetest.

- Arvude n ja p poolt genereeritud hulk on võrdsustajas

$$E = \left\{ n^i p^j \mid 0 \leq i, j \leq \lfloor \sqrt{r} \rfloor \right\} \subseteq I_{g(x)}.$$

- Hulgas E on rohkem kui r elementi, seega leiduvad paarid

$$n^{i_1} p^{j_1} \equiv n^{i_2} p^{j_2} \mod r, \qquad i_1 \neq i_2 \text{ või } j_1 \neq j_2.$$

Mooduli vahetus

- Meil on olemas kongruents mooduli r järgi

$$n^{i_1}p^{j_1} \equiv n^{i_2}p^{j_2} \mod r, \qquad i_1 \neq i_2 \text{ või } j_1 \neq j_2.$$

aga vaja on kongruentsi mooduli d_g järgi.

Lemma 1.
Olgu nullist erineva polünoomi $g(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ järk d_g korpuses $\mathbb{F}_p[x]/\big(h(x)\big)$, kus $h(x) \mid x^r - 1$, ning $m_1, m_2 \in I_{g(x)}$, siis kongruentsist $m_1 \equiv m_2 \mod r$ järeldub $m_1 \equiv m_2 \mod d_g$.

TÕESTUS.
- Kuna $m_1 \equiv m_2 \mod r$, siis $m_2 = kr + m_1$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & g(x)^{m_2} \equiv g(x^{m_2}) \; \big(\bmod\, p, h(x)\big) \\ & x^{kr} \equiv 1 \mod x^r - 1 \\ \Rightarrow \quad & g(x^{m_1+kr}) \equiv g(x^{m_1}) \; \big(\bmod\, p, h(x)\big). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & g(x)^{m_1} g(x)^{kr} \equiv g(x)^{m_2} \equiv g(x^{m_1}) \; \big(\bmod\, p, h(x)\big) \\ & \quad \Rightarrow \quad g(x)^{kr} \equiv 1 \; \big(\bmod\, p, h(x)\big). \end{aligned}$$

- Järgu omadustest $d_g \mid kr = m_2 - m_1$. $\square$

Oodatud vastuolu

- Teame, et polünoomi $g(x)$ järk $d_g \geq n^{2\sqrt{r}}$

- Teame, et kehtib kongruents

$$n^{i_1} p^{j_1} \equiv n^{i_2} p^{j_2} \mod d_g \quad i_1 \neq i_2 \text{ või } j_1 \neq j_2.$$

- Kuna $0 \leq i_1, i_2, j_1, j_2 \leq \lfloor \sqrt{r} \rfloor$, siis

$$p^{j_1}, p^{j_2} < n^{\sqrt{r}} \qquad n^{i_1}, n^{i_2} \leq n^{\sqrt{r}}$$

- Seega on kongruentsi vasak ja parem pool väiksemad kui d_g.

- Kongurents taandub võrduseks

$$n^{i_1} p^{j_1} = n^{i_2} p^{j_2} \quad \Rightarrow \quad n^{i_1 - i_2} = p^{j_2 - j_1}$$

- Vastuolu n on algarvu p aste.

$\square$

Sertifikaadi leidumine

Teoreem.
Leiduvad positiivsed konstandid c_1, c_2 *ja* n_0 *nii, et iga naturaalarvu* $n > n_0$ *korral*
- *leidub intervallis* $[c_1 \log^6 n, c_2 \log^6 n]$ *algarv* r, *mille korral*
- $r - 1$ *omab algarvulist tegurit* $q \geq 4\sqrt{r} \log n$,
- q *jagab* n *järku* $\mathrm{ord}_r(n)$.

☐ Läbi tuleb vaadata lõik, mis on polünomiaalne arvu n pikkusest $\log n$ ja milles olevate arvude pikkus on $O(\log \log n)$

☐ See tähendab, et otsimiseks võib kasutada eksponentsiaalse keerukusega algoritme.

☐ Kui pole täidetud sertifikaadi esimene tingimus on arvul päristegur.

☐ Tõestus põhineb kahel arvuteoreetilisel hinnangul.

Vajalikud teoreemid

Teoreem.
Tähistagu $P(n)$ suurimat arvu n algarvulist tegurit, siis leiduvad konstandid $\varepsilon > 0$ ja $n_0 \in \mathbb{N}$ nii, et kõigi $x \geq n_0$ korral järgmise hulga

$$\mathcal{Q}_x = \left\{ p \in \mathbb{P} \mid p \leq x,\ P(p-1) > x^{2/3} \right\}$$

elementide arv $\#\mathcal{Q}_x \geq c\frac{x}{\log x}$.

Teoreem.
Tähistagu $\pi(n)$ algarvude arvu, mis on väiksemad kui n. Siis iga $n \in \mathbb{N}$ kehtivad võrratused

$$\frac{n}{6 \log n} \leq \pi(n) \leq \frac{8n}{\log n}.$$

Tõestus ise

- Tõestuseks vaatame peaaegu sobivate algarvude hulka

$$\mathcal{R} = \Big\{ r \in \mathbb{P} \,|\, r \in [c_1 \log^6 n, c_2 \log^6 n],$$
$$P(r-1) > (c_2 \log^6 n)^{2/3} > r^{2/3} \Big\}.$$

- Hindame alt hulga $\mathcal{R}$ elementide arvu

$$\begin{aligned} \#\mathcal{R} \geq & \#\mathcal{Q}_{c_2 \log^6 n} - \pi(c_1 \log^6 n) \\ & \ldots \\ \geq & c_3 \frac{\log^6 n}{\log\log n}, \text{ kus } c_3 > 0. \end{aligned}$$

- Tähistame $x = c_2 \log^6 n$ ja vaatame korrutist

$$\Pi = (n-1)(n^2-1)\cdots(n^{\lfloor x^{1/3} \rfloor} - 1).$$

- Selles on vähem kui $\log \Pi \approx x^{3/2} \log x = O(\log^5 n)$ tegurit.

- Hulgas $\mathcal{R}$ on $\widehat{O}(\log^6 n)$ elementi.

Sertifikaadi kontrollimise keerukus

Teoreem.
Olgu r algarv intervallist $[c_1 \log^6 n, c_2 \log^6 n]$, siis kongruentside süsteemi

$$\begin{cases} (x-a)^n \equiv x^n - a^n \pmod{n, x^r - 1}, \\ \qquad a = 1, 2, \ldots, \lfloor 2\sqrt{r} \log n \rfloor. \end{cases}$$

kontrollimiseks kulub $\widetilde{O}(\log^{12} n)$ elementaaroperatsiooni.

Tõestus. Anname ülehinnangu.

- Tsüklit läbitakse $O(\log^4 n)$ korda.
- Ühe astendamise tegemiseks kulub $O(\log n)$ korrutamist.
- Polünoomi korrutamiseks kulub $O(r^2) = O(\log^{12} n)$ ringi $\mathbb{Z}_n$ tehet.
- Üks tehe ringis $\mathbb{Z}_n$ võtab $O(\log^2 n)$ elementaaroperatsiooni.
- Kokku seega $O\left(\log^{4+1+12+2} n\right) = O(\log^{19} n)$. $\square$

Algoritmi keerukushinnang

Teoreem.
Agrawal-Kayal-Saxena algoritm teeb $\widetilde{O}(\log^{12} n)$ elementaaroperatsiooniga kindlaks, kas naturaalarv n on algarv või mitte.

Tõestus.

- Võimalikke mõistlikke astmeid on $\log n$.
- Kasutades kahendotsingut on võimalik leida juure väärtus $O(\log n)$ väärtustamisega.
- Üks väärtustamine võtab ülimalt $O(\log b \log^2 n)$ elementaaroperatsiooni. Kokku $O(\log^{1+1+3} n)$.
- Sertifikaadi otsimisel läbitakse while-tsüklit $O(\log^6 n)$ korda.
- Algarvulisuse kindlakstegemine kirvemeetodiga võtab $O(r^3) = O(\log^{18} n)$ elementaaroperatsiooni.
- Kokku seega $O\Big(\log^{6+18} n\Big) = O(\log^{24} n)$.
- Sertifikaadi kontrollimisel kulub $O(\log^{19})$. $\square$

Arvatav keerukushinnang

Definitsioon.
Kui naturaalarvud r ja $\frac{r-1}{2}$ on algarvud, siis nimetatakse neid Sophie Germain kaasalgarvudeks.

- Kui r ja $\frac{r-1}{2}$ on Sophie kaasalgarvud, siis arvu n järk mooduli r järgi võib olla:
  $+ 1$, 2, q, $2q$

- Ülimalt saab olla $\log(n^2 - 1) \leq 2\log n$ halba Sophie kaasalgarvupaari.

- Seetõttu väheneb sertifikaadi otsimisel vaadatav vahemik $[2, c_2 \log^2 n]$.

- See omakorda viib summaarse keerukuse $\widetilde{O}(\log^6 n)$.

Loodetav keerukushinnang

Hüpotees.
Kui algarv r ei jaga naturaalarvu n ja kehtib kongruentsvõrdus

$$(x-1)^n \equiv x^n - 1 \pmod{x^r - 1, n}$$

siis kas n on algarv või $n^2 \equiv 1 \mod r$.

- Vaadatav lõik väheneb $[2, 4\log n]$.
- Kontrollide tuleb vaadata vaid ühte võrdust.
- Keerukuseks tuleks $\widetilde{O}(\log^3 n)$.
- Rabin-Milleri keerukus $\widetilde{O}(\log^2 n)$.